



Übungen zur Vorlesung Riemannsche Geometrie Blatt I

1. Wir betrachten die offene Teilmenge $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ mit den Standardkoordinaten $\Phi : M \rightarrow M, (x, y) \mapsto (x, y)$.

- (i) Zeige, dass $\Psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow M, (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ eine mit (M, Φ) verträgliche Karte bildet.

Sei $\hat{p} = (r, \vartheta) = (2, \frac{\pi}{2}) \in M, v := 3 \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_p \in T_p M$.

- (ii) Bestimme $v(f)$, wobei $f \in C^\infty(M)$ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\hat{f}(r, \vartheta) = r \frac{e^{r^2} \cos \vartheta}{2}.$$

- (iii) Entwickle v in der Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right\}$.

- (iv) Bestimme $v(g)$, wobei $g \in C^\infty(M)$ in Standardkoordinaten definiert ist durch

$$\hat{g}(x, y) = \frac{1}{2} x e^{y^2 + x^2}.$$

2. Es seien M^m und N^n zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Finde eine differenzierbare Struktur auf $M \times N$, so dass $M \times N$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$ wird, und die Projektionen $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ und $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ glatte Abbildungen sind.

3. Es sei $\mathbb{RP}^n := \{V \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid V \text{ ist ein eindimensionaler Unterraum}\}$.

- (i) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$x \sim y : \iff \exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Zeige: Dies ist eine Äquivalenzrelation und es gilt $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \mathbb{RP}^n$.

- (ii) Für ein Element $[x] \in \mathbb{RP}^n$ schreiben wir $[(x_1, \dots, x_{n+1})] =: [x_1 : \dots : x_{n+1}]$. Ferner definieren wir $U_1, \dots, U_{n+1} \subset \mathbb{RP}^n$ durch

$$U_i := \{[x_1 : \dots : x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i), [x_1 : \dots : x_{n+1}] \mapsto \frac{1}{x_i} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Zeige, dass φ_i wohldefiniert und bijektiv ist.

- (iii) Zeige, dass die Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ glatte Diffeomorphismen sind und folgere, dass $\mathbb{RP}^n$ eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.