Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 13.6.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 8

23. *Stetigkeit der Norm.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig ist. (3)

Tipp: Zeige zuerst die umgekehrte Dreiecksungleichung $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ für $x, y \in E$.

24. *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit.* Sei F ein normierter Vektorraum und E ein Banachraum. Es gebe einen dichten Unterraum $F_0 \subset F$ und $T_0 \in \mathcal{L}(F_0, E)$. Zeige: Es gibt eine eindeutige Fortsetzung $T \in \mathcal{L}(F, E)$ mit $\|T\| = \|T_0\|$. (6)

25. *Bedingte Erwartung.* Alle Vektorräume sind in dieser Aufgabe reell. Sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte messbare Mengen mit positivem Maß und $\cup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

(a) Bestimme die von $A_1, \ldots, A_n$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F} := \sigma(A_k : k \in \{1, \ldots, n\})$. (3)

(b) Für $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ bestimme die bedingte Erwartung von f bezüglich $\sigma(A_k : k \in \{1, \ldots, n\})$. (4)

Sei $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von Σ. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator Q, der $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ auf die bedingte Erwartung Qf bezüglich $\mathcal{F}$ abbildet, positiv ist, d.h. aus $f \geq 0$ folgt $Qf \geq 0$.

(c) Zeige oder widerlege: Es gilt $Q(|f|) \leq |Qf|$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. (2)

(d) Zeige oder widerlege: Es gilt $Q(|f|) \geq |Qf|$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. (2)