



---

## Lösungen zur Klausur Hilberträume & Fouriertransformation

---

1. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit Fouriertransformierter  $\hat{f}$ . Für ein  $a \in \mathbb{R}$  definieren wir eine neue Funktion  $g(t) := f(t - a)$ . Zeige, dass  $g \in L^1(\mathbb{R})$  und bestimme die Fouriertransformierte  $\hat{g}$  von  $g$  in Abhängigkeit von  $\hat{f}$ . (10)

**Lösung:** Aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - a)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Also ist  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Für die Fouriertransformation folgt ebenso aus der Translationsinvarianz, dass

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y - a) e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ix(y+a)} dy = e^{-ixa} \hat{f}(x).$$

2. Es seien  $(E, \|\cdot\|)$  und  $(F, \|\cdot\|)$  zwei normierte Räume und  $T : E \rightarrow F$  linear. Zeige, dass  $T$  genau dann stetig ist, wenn es ein  $C \geq 0$  mit  $\|Tx\| \leq C \|x\|$  für alle  $x \in E$  gibt. (15)

**Lösung:** Gibt es ein solches  $C \geq 0$ , so folgt aus  $x_n \rightarrow x$

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $T$  stetig. Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit (in der Null), dass es ein  $\delta > 0$  gibt so, dass aus  $\|x\| \leq \delta$  die Abschätzung  $\|Tx\| \leq 1$  folgt. Da die Ungleichung für  $x = 0$  offensichtlich erfüllt ist, können wir  $x \neq 0$  annehmen. Dann ist

$$\|Tx\| = \delta^{-1} \left\| T \left( \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq \delta^{-1} \|x\|,$$

also ist die Behauptung mit  $C := \delta^{-1}$  gezeigt.

3. Wir betrachten den reellen Hilbertraum  $H = \ell^2$ .

- (a) Zeige, dass die Menge  $M := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = x_2\}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\ell^2$  ist. (10)

**Lösung:** Das lineare Funktional  $\varphi : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto x_1 - x_2$  ist wegen  $|x_i| \leq \|x\|_{\ell^2}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  stetig. Daraus folgt, dass  $M = \text{Kern } \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$  ein abgeschlossener Unterraum ist.

- (b) Gebe explizit mit Beweis die orthogonale Projektion  $P$  von  $H$  auf  $M$  an. (10)

**Lösung:** Wir behaupten, dass  $Px = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, x_4, \dots)$  die gesuchte Projektion ist. Schreibt man  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, x_4, \dots)$  als die Summe

$$\frac{1}{2}(x_1, x_2, x_3, \dots) + \frac{1}{2}(x_2, x_1, x_3, x_4, \dots),$$

so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass  $P \in \mathcal{L}(H)$  mit  $\|P\| \leq 1$ . Offensichtlich gilt auch  $P^2 = P$  mit  $\text{Rg } P = M$ , d.h.  $P$  ist eine Projektion auf  $M$ . Um zu zeigen, dass  $P$

die orthogonale Projektion auf  $H$  ist, rechnen wir die charakterisierende Eigenschaft der orthogonalen Projektion nach. In der Tat gilt für  $x \in \ell^2$  und  $y \in M$ , dass

$$\begin{aligned}(x - Px|y - Px) &= (x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2})(y_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}) + (x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2})(y_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}) \\ &= (y_1 - \frac{x_1 + x_2}{2})(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)) = 0.\end{aligned}$$

Also ist  $P$  die orthogonale Projektion.

4. Wir betrachten den reellen Hilbertraum  $H = \ell^2$ .

- (a) Es gelte  $x_n \rightharpoonup x$  in  $\ell^2$ . Zeige, dass dann  $x_n$  komponentenweise gegen  $x$  konvergiert. (10)

**Lösung:** Sei  $x_n \rightharpoonup x$ . Dann ist  $(x_n|y) \rightarrow (x|y)$  für alle  $y \in \ell^2$ . Insbesondere gilt für den  $k$ -ten Einheitsvektor  $y = e_k = (\delta_{kl})_{l \in \mathbb{N}}$ , dass  $x_n^{(k)} = (x_n|e_k) \rightarrow (x|e_k) = x^{(k)}$ . Das ist gerade die komponentenweise Konvergenz.

- (b) Gilt auch die Umkehrung? Begründe Deine Antwort! (10)

**Lösung:** Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte die Folge  $(ne_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $(ne_n|e_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  schließlich gleich Null, aber die Folge konvergiert nicht schwach, da sie nicht beschränkt ist.

5. Sei  $H$  ein komplexer separabler Hilbertraum.

- (a) Formuliere eine Version des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte lineare Operatoren aus der Vorlesung. (10)

**Lösung:** Siehe Skript.

- (b) Sei  $P$  ein kompakter selbstadjungierter linearer Operator auf  $H$ .

Zeige:  $P$  ist genau dann eine Projektion, wenn für das Punktspektrum  $\sigma_p(P) \subset \{0, 1\}$  gilt. (15)

**Lösung:** Ist  $\lambda$  ein Eigenwert mit Eigenvektor  $x$ , so gilt  $\lambda x = Px = P^2x = \lambda^2x$ , also erfüllt  $\lambda$  die Gleichung  $\lambda(\lambda - 1) = 0$  und somit  $\sigma_p(P) \subset \{0, 1\}$ . Umgekehrt folgt aus dem Spektralsatz, dass es eine Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $H$  mit  $Px = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n$  gibt. Nach Voraussetzung gilt  $\lambda_n = 0$  oder  $\lambda_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $P^2e_n = Pe_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  total ist, folgt  $P^2 = P$ .  $P$  ist also eine Projektion.

6. Finde mit Begründung ein Beispiel für

- (a) einen kompakten linearen Operator auf einem Hilbertraum mit unendlichdimensionalem Bild. (7)

**Lösung:** Für einen separablen Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  betrachte wie in den Übungen den Multiplikationsoperator  $T_m$  bezüglich einer Nullfolge  $m$ , für die  $m_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Nach den Übungen ist dann  $T_m$  kompakt und wegen  $e_n \in \text{Rg } T_m$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist das Bild unendlichdimensional.

- (b) einen Prähilbertraum, der kein Hilbertraum ist. (7)

**Lösung:** Der Raum  $c_{00}$  aller Folgen, die schließlich Null sind, ist ein Unterraum von  $\ell^2$  und wird mit dem von  $\ell^2$  induzierten Skalarprodukt ein Prähilbertraum. Unterräume von Hilberträumen sind nach der Vorlesung aber genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen sind. Betrachtet man etwa die Folge  $x_n = (\mathbb{1}_{[0,n]}(k) \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so sieht man, dass  $c_{00}$  nicht abgeschlossen ist. Der Unterraum  $c_{00}$  liegt sogar dicht in  $\ell^2$ , da wir jedes Element  $x \in \ell^2$  wegen  $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \rightarrow 0$  beliebig genau durch Elemente aus  $c_{00}$  approximieren können.

- (c) einen Hilbertraum  $H$  und einen Unterraum  $U \subset H$ , der dicht in  $H$  ist und  $U \neq H$  erfüllt. (7)

**Lösung:** Man nehme  $H = \ell^2$  und  $U = c_{00}$  wie in dem vorherigen Beispiel.

- (d) einen Hilbertraum  $H$  und eine beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $H$ , die nicht schwach konvergiert. (7)

**Lösung:** Die Folge  $x_n = (-1)^n$  in  $H = \mathbb{R}$  konvergiert nicht schwach, da ansonsten  $(x_n|1) = 1 \cdot x_n = (-1)^n$  konvergieren müsste.

- (e) einen Hilbertraum  $H$  und einen injektiven Operator  $T \in \mathcal{L}(H)$ , der nicht invertierbar ist. (7)

**Lösung:** Betrachte auf  $\ell^2$  den Operator  $u : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Dieser ist offensichtlich injektiv. Die Folge  $(1, 0, 0, \dots)$  kann aber nicht in dem Bild von  $u$  liegen. Somit ist  $u$  nicht surjektiv und damit nicht invertierbar.

- (f) einen separablen Hilbertraum  $H$  und ein abzählbares Orthonormalsystem  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $H$ , das keine Orthonormalbasis ist. (7)

**Lösung:** Wähle eine Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eines separablen Hilbertraums  $H$ . Dann ist  $(e_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  keine Orthonormalbasis, denn es gilt  $(e_1|e_n) = 0$  für alle  $n \geq 2$ , aber  $e_1 \neq 0$ , was bei einer Orthonormalbasis nicht der Fall sein kann.