



Übungen Maßtheorie: Blatt 5

11. Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume. Eine Funktion $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt *messbar*, (4)
falls $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \Sigma_2$. Sei nun $\mathfrak{a} \subset \Sigma_2$ mit $\sigma(\mathfrak{a}) = \Sigma_2$ und $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ derart,
dass $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \mathfrak{a}$. Zeige, dass dann f bereits messbar ist.

12. Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume sowie $f, g: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ zwei messbare Funktionen. (2)
Ist dann für $A \in \Sigma_1$ auch die Funktion

$$h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

messbar? Zeige oder widerlege!

13. (a) Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume. Zeige, dass jede stetige (3)
Funktion $f: M_1 \rightarrow M_2$ messbar ist, wobei wir auf M_i ($i = 1, 2$) die Borelsche
 σ -Algebra betrachten.

- (b) Ist jede monotone Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar? Zeige oder widerlege! (4)

14. Ist jede Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar? Zeige oder widerlege! (2)