



## Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 1

1. Es seien  $c > 0$ ,  $u_0 \in C^2[a, b]$  und  $u_1 \in C^1[a, b]$ , sodass

$$u_0(a) = u_0''(a) = u_0(b) = u_0''(b) = u_1(a) = u_1(b) = 0.$$

Zeige, dass eine Funktion  $u \in C^2([0, \infty) \times [a, b])$ , existiert, die folgendes Anfangs-Randwertproblem löst:

$$(ARWP) \quad \begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & t > 0, x \in (a, b) \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & x \in (a, b) \end{cases}$$

**Hinweis:** Setze die Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  ungerade auf ganz  $\mathbb{R}$  fort.

2. Es sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  und  $v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Zeige, dass  $v \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$  und

$$\Delta u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v_{rr}(r, \varphi) + \frac{v_r(r, \varphi)}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}(r, \varphi)}{r^2}$$

für alle  $r > 0$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

3. In dieser Aufgabe wollen wir mit Hilfe der sog. *Trennung der Variablen* die Lösungsformel der Laplacegleichung auf der Kreisscheibe herleiten.

Gesucht ist eine Funktion  $u \in C^2((0, 1) \times \mathbb{R})$  mit  $u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0$  für alle  $r \in (0, 1)$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Wir nehmen an, dass eine solche Lösung existiert und von der Form  $u(r, \varphi) = v(r) \cdot w(\varphi)$  ist mit geeigneten Funktionen  $v \in C^2((0, 1))$  und  $w \in C^2(\mathbb{R})$ , wobei  $w(\varphi) = w(2\pi + \varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

- (a) Folgere die Identität

$$r^2 \frac{v''(r)}{v(r)} + r \frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} \quad (r \in (0, 1), \varphi \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

unter der Annahme, dass  $v$  und  $w$  keine Nullstellen besitzen. Da die Variablen nun getrennt sind, muss es sich bei beiden Seiten der Gleichung (1) um eine Konstante handeln, die wir mit  $\lambda$  bezeichnen.

- (b) Wir erhalten die Bedingung  $w'' = -\lambda w$  an die Funktion  $w$ . Folgere, dass  $\lambda \geq 0$ .  
(c) Die allgemeine Lösung der Gleichung  $w'' = -\lambda w$  lautet nun

$$w(\varphi) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \varphi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Folgere, dass  $\lambda = n^2$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- (d) Formuliere, analog zu Aufgabenteil (b), eine Gleichung für  $v$  und rate eine nicht-triviale Lösung (in Abhängigkeit von  $n$ ).  
(e) Gib für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine nicht-triviale Lösung  $u$  der Laplacegleichung an.

4. Es sei  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Wir suchen eine Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  der folgenden *Transportgleichung* auf  $\mathbb{R}$ .

$$(T) \quad \begin{cases} u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(t, x) + cu_x(t, x) = 0 & t, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (a) Sei  $u$  eine Lösung von (T) und definiere

$$v(\tau, \xi) := u(\tau, \xi + c\tau) \quad (\tau, \xi \in \mathbb{R}).$$

Zeige, dass der Wert der Funktion  $v$  nicht von  $\tau$  abhängt.

- (b) Folgere, dass  $u(t, x) := u_0(x - ct)$  die eindeutige Lösung von (T) ist.