



---

## Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

---

Blatt 3

### 7. Parabolisches Maximumprinzip mit Neumann-Randbedingungen

Es sei  $\Omega := (a, b)$  und  $\tau > 0$ . Wir diskutieren eine Funktion  $u \in C^{1,2}((0, \tau) \times [a, b])$  mit  $u_t \leq u_{xx}$  auf  $(0, \tau) \times [a, b]$  und  $u_x(t, a) = u_x(t, b) = 0$  für alle  $t \in (0, \tau)$ .

- (a) Es sei  $t \in (0, \tau)$ . Zeige, dass  $u_{xx}(t, a) \leq 0$  falls  $u(t, a) = \max_{x \in [a, b]} u(t, x)$  und dass  $u_{xx}(t, b) \leq 0$  falls  $u(t, b) = \max_{x \in [a, b]} u(t, x)$ .
- (b) Zeige, dass  $u(t, x) \leq \max_{z \in [a, b]} u(0, z)$  für alle  $(t, x) \in [0, \tau] \times [a, b]$ .
- (c) Zeige, dass es für alle  $u_0 \in C([a, b])$  höchstens ein  $u \in C^{1,2}((0, \tau) \times [a, b])$  gibt, mit  $u_t = u_{xx}$  auf  $(0, \tau) \times [a, b]$ ,  $u_x(t, a) = u_x(t, b) = 0$  für alle  $t \in (0, \tau)$  und  $u(0, \cdot) = u_0$ . Zeige weiter: Ist  $u_0 \geq 0$ , so ist auch  $u \geq 0$ .

### 8. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(WLG) \quad \begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) & t > 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

für Anfangswerte  $u_0$  aus dem Vektorraum  $C_0([0, \pi]) := \{f \in C([0, \pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ , der im Folgenden stets mit der Supremumsnorm  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)|$  versehen sei.

- (a) Für  $t \geq 0$  definieren wir die Abbildung  $T(t) : C_0([0, \pi]) \rightarrow C_0([0, \pi])$  durch

$$T(t)f := u(t, \cdot),$$

wobei  $u$  die eindeutige Lösung von (WLG) mit Anfangswert  $u_0 = f$  bezeichne. Zeige, dass  $\{T(t) : t \geq 0\}$  eine Familie kontraktiver linearer Operatoren ist, die dem Halbgruppengesetz

$$T(0) = I \quad \text{und} \quad T(t)T(s) = T(t+s) \quad (t, s \geq 0)$$

genügt.

- (b) Zeige, dass es Konstanten  $M, \omega > 0$  gibt, sodass

$$\|T(t)f\| \leq Me^{-\omega t} \|f\|$$

für alle  $f \in C([0, \pi])$  und  $t \geq 0$ .

**Hinweis:** Schätze den Ausdruck  $e^{\omega t}(T(t)f)(x)$  mithilfe der Lösungsformel ab.

### 9. Beweise die nachstehenden Eigenschaften des Gaußkerns

$$g(t, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

- (a)  $g \in C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R})$  mit  $g_t = g_{xx}$ .
- (b)  $\int_{\mathbb{R}} g(t, x) dx = 1$  für alle  $t > 0$ .