



Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 5

15. Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $g \in L^\infty(a, b)$ mit $g \geq 0$ und $f \in L^2(a, b)$. Wir suchen eine Lösung folgenden Problems:

$$(P) \quad \begin{cases} u \in H^2(a, b) \\ gu - u'' = f \\ u(a) = 0 \\ u'(b) = 0. \end{cases}$$

Dazu definieren wir die Form $a : H_0^1(a, b] \times H_0^1(a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a(u, v) := \int_a^b u'v' + \int_a^b guv.$$

- (a) Zeige, dass die Form a bilinear, symmetrisch, stetig und koerziv ist.
 - (b) Zeige, dass ein $u \in H_0^1(a, b]$ genau dann das Problem (P) löst, wenn $a(u, v) = (f | v)$ für alle $v \in H_0^1(a, b]$.
 - (c) Zeige, dass das Problem (P) eine eindeutige Lösung $u \in H^2(a, b)$ besitzt. Zeige weiter, dass $u \in C^\infty(a, b)$, falls $f, g \in C^\infty(a, b)$.
16. Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\lambda \geq 0$, $\beta > 0$, $f \in L^2(a, b)$ und $A, B \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine Lösung folgenden elliptischen Problems mit inhomogenen gemischten Neumann- und Robin-Randbedingungen:

$$(P_{f,A,B}) \quad \begin{cases} u \in H^2(a, b) \\ \lambda u - u'' = f \\ \beta u(a) - u'(a) = A \\ u'(b) = B. \end{cases}$$

Wir definieren die Form $a : H^1(a, b) \times H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a(u, v) := \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a).$$

- (a) Zeige, dass die Form a bilinear, symmetrisch und stetig ist.
- (b) Zeige, dass die Form a koerziv ist. **Hinweis:** Beachte, dass auch $\lambda = 0$ zugelassen ist.
- (c) Zeige, dass eine Funktion $u \in H^1(a, b)$ genau dann das Problem $(P_{f,0,0})$ löst, wenn $a(u, v) = (f | v)$ für alle $v \in H^1(a, b)$.
- (d) Konstruiere Funktionen $f_1, f_2 \in L^2(a, b)$, für die die Probleme $(P_{f_1,1,0})$ und $(P_{f_2,0,1})$ Lösungen besitzen. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit h_1 und h_2 . Zeige im Anschluss, dass ein $u \in H^2(a, b)$ genau dann Lösung von $(P_{f,A,B})$ ist, wenn die Funktion $u - Ah_1 - Bh_2$ Lösung von $(P_{f-Af_1-Bf_2,0,0})$ ist.
- (e) Zeige, dass $(P_{f,A,B})$ eine eindeutige Lösung besitzt.