Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 05.07.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 9

Riesz'scher Darstellungssatz
Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\varphi : C(K) \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Dann gibt es genau ein endliches Borelmaß μ auf K, sodass $\varphi(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f \in C(K)$.

Satz von Stone-Weierstrass
Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $U \subset C(K)$ ein Unterraum derart, dass $\mathbb{1} \in U$ und für $f, g \in U$ auch $f \cdot g \in U$. Falls es ferner für alle $x, y \in K$, $x \neq y$, ein $f \in U$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt, so ist U dicht in $C(K)$.

27. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand und äußerer Normalen $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$.

(a) Zeige, dass die Menge $\{u_{|\partial\Omega} : u \in C^1(\overline{\Omega})\}$ in $C(\partial\Omega)$ dicht ist.

(b) Es sei $\varphi : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig und linear, sodass $\varphi(g\nu_j) = 0$ für alle $g \in C(\partial\Omega)$ und $j = 1, \ldots, d$. Zeige, dass $\varphi = 0$.

(c) Zeige, dass es höchstens ein endliches Borelmaß σ auf $\partial\Omega$ gibt, sodass

$$\int_\Omega (D_j u)(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(z)\nu_j(z) \, \mathrm{d}\sigma(z)$$

für alle $j = 1, \ldots, d$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Für die nachstehenden Aufgaben fixieren wir folgende Bezeichnungen: Für $d \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ sei $B(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < r\}$ und es bezeichne σ_r das Oberflächenmaß auf $\partial B(0, r)$ und λ das d-dimensionale Lebesguemaß. Wir setzen $\omega_d := \sigma_1(\partial B(0, 1))$.

28. Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $r > 0$.

(a) Zeige, dass $d\lambda(B(0, r)) = r\sigma_r(\partial B(0, r))$.
Hinweis: Berechne Δv für $v(x) := |x|^2/2$.

(b) Zeige, dass $\sigma_r(\partial B(0, r)) = dr^{d-1}\lambda(\Omega_1)$. Folgere hieraus, dass

$$\sigma_r(\partial B(0, r)) = r^{d-1}\omega_d \quad \text{und} \quad \lambda(B(0, r)) = \frac{\omega_d r^d}{d}.$$

Hinweis: Zwiebelintegration

(c) Es sei $d \geq 2$ und $u \in C(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ mit $|D_j u| \leq c$ auf $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ für alle $j = 1, \ldots, d$. Setze $f(x) := \Delta u(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ und $f(0) := 0$. Zeige, dass $\Delta u = f$ im schwachen Sinn.
Hinweis: Verwende die Green'schen Formeln auf $B(0, R) \backslash B(0, \delta)$ für $R > 0$ geeignet und $\delta \to 0$.

29. Die Mittelwerteigenschaft
Es sei $d \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $f \in C(\overline{B(x, r)})$ definieren wir

$$⨍_{\partial B(x,r)} f(z) \, \mathrm{d}\sigma_r(z) := \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{\partial B(x,r)} f(z) \, \mathrm{d}\sigma_r(z) = ⨍_{\partial B(0,1)} f(x + rz) \, \mathrm{d}\sigma_1(z).$$

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C^2(\Omega)$.

(a) Es sei $\Delta u = 0$ auf Ω und $x \in \Omega$. Zeige, dass $\varphi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(z)\, \mathrm{d}\sigma_r(z) = u(x)$ für alle $r > 0$ mit $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$.

Anleitung: Zeige, dass $\lim_{r\to 0} \varphi(r) = u(x)$ und dass $\varphi' = 0$ ist.

(b) Nun erfülle u in einem Punkt $x \in \Omega$ die *Mittelwerteigenschaft*, d.h. es gelte

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(z)\, \mathrm{d}\sigma_r(z)$$

für alle $r > 0$ mit $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Zeige, dass $\Delta u(x) = 0$.

(c) Nun sei $v \in C(\Omega)$. Zeige, dass v genau dann in jedem Punkt $x \in \Omega$ die Mittelwerteigenschaft erfüllt, wenn $v \in C^\infty(\Omega)$ mit $\Delta v = 0$.

Anleitung: Zeige durch Zwiebelintegration, dass die Regularisierung v_ε mit v übereinstimmt.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt insbesondere, dass der gleichmäßige Grenzwert von harmonischen Funktionen wieder harmonisch ist.