



Aufgaben zur Probeklausur Analysis I

1. Bestimme für (8)

$$z = \frac{3 + 2i}{2i - 1}$$

den Real- und Imaginärteil, die zu z konjugiert komplexe Zahl sowie den Betrag von z .

2. Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Zeige, dass das Infimum von $M_1 \cup M_2$ existiert und dass gilt (10)

$$\inf(M_1 \cup M_2) = \min\{\inf M_1, \inf M_2\}.$$

3. Bestimme, falls existent, Supremum und Maximum der Menge (10)

$$M := \left\{ \frac{3}{m} - \frac{2}{n} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}.$$

4. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichheit gilt: (12)

$$\sum_{k=0}^n \binom{k + \alpha}{k} = \binom{n + \alpha + 1}{n}.$$

5. Bestimme den Grenzwert der Folge (10)

$$a_n := \frac{n^3 + 2n}{3n^3 + \log n}$$

und beweise die Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzdefinition.

6. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert. (4x4)

(a) $a_n = \frac{n^2 + 2^n - 3^n}{3^n + n^2 2^n}$

(b) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$

(c) $a_n = \left(\frac{1 + (-1)^n n}{3 + n} \right)^n$

(d) $a_n = \left(1 + \frac{\log n}{n} \right)^n$

7. Gegeben seien zwei beschränkte, reelle Folgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass (10)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

8. Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (6×4)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2k^2 + 1}{k^5 + k - 1}$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2i + 3}{4}\right)^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log(k+2)}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^4 e^{-k^2}$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k \log(2^k)}{k^3}\right)^k$