



UNIVERSITÄT ULM

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Jochen Glück
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: 100

Probeklausur zur Maßtheorie

1. Beweisen oder widerlegen Sie: (5 × 5)
 - (a) Jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
 - (b) Die Menge $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist eine σ -Algebra auf $\{1, 2, 3\}$.
 - (c) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $A \in \Sigma$ eine endliche Menge. Dann ist A eine Nullmenge.
 - (d) Seien $f, g : [0, 5] \rightarrow [0, \infty)$ Borel-messbar und bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $[0, 5]$. Dann gilt $\int_{[0, 5]} fg \, d\lambda = \int_{[0, 5]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0, 5]} g \, d\lambda$.
 - (e) Das Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ ist σ -endlich.
2. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Außerdem sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Teilmengen von Ω mit der Eigenschaft $A_n \downarrow \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\int_{A_n} f \, d\mu \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. (15)
3. (a) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß. Geben Sie eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit folgenden Eigenschaften an: (10)
 - (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
 - (ii) Es gilt $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.
- (b) Sei $\Omega := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Geben Sie eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften an: (5)
 - (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
 - (ii) μ ist kein Maß.
4. Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion. Wir definieren $\mu(B) := \int_B h \, d\lambda$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass μ ein Maß auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.
 - (a) Zeigen Sie für jede Funktion $f \in \mathcal{T}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Formel $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \, d\lambda$. (10)
 - (b) Zeigen Sie für jede Funktion $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Formel $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \, d\lambda$. (10)
 - (c) Sei nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar und sei $fh \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Zeigen Sie: Es gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ und $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} fh \, d\lambda$. (10)
5. (a) Es sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ das Maß, das durch $\mu(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{k!}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben ist. Zudem sei $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, $f(k) = 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = e^2 - 1$ gilt. (6)
- (b) Es bezeichne λ das ein-dimensionale Lebesgue-Maß und es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = -x\mathbb{1}_{[-3, -1]}(x) + \mathbb{1}_{[2, 3]}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$. (9)