Universität Ulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Übungen zur Analysis II

Werner Balser
Daniel Hauer
SS 2009

Übungsblatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, den 25. Juni 2009, vor der Vorlesung im H3 um 12.00 Uhr.

Das Übungsblatt und weitere aktuelle Informationen zur Veranstaltung *Analysis II* gibt es im Internet auf der Seite:

`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss09/anaii/ueb-ana2.html`.

Aufgabe 1.

(a) (2+2 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine im Punkte $a \in \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Berechne die erste und zweite Ableitung von $g(t) := f(a + tv)$ an der Stelle $t = 0$.

(b) (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^T \qquad \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,0)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\right\}.$$

Berechne $f'(x,y)$ und verwende dann die Kettenregel (**Satz 5.4.1** im Skript), um für die Funktion $F(r,\varphi) := f(r\cos\varphi\,,\,r\sin\varphi)$, $r > 0, -\pi < \varphi < \pi$, die partiellen Ableitungen $F_r(r,\varphi)$ und $F_\varphi(r,\varphi)$ zu berechnen.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Entscheide, ob folgende Funkionen differenzierbar sind und bestimme gegebenenfalls deren Ableitung:

(a) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \cos(t^2 x)\,dt$.

(b) $G : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{e^{-t^2/x}}{t}\,dt$.

Aufgabe 3.

(a) (2 Punkte) Bestimme von der Funktion $f : (-\infty, 1/2) \times (-\infty, 1/2) \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f(x_1,x_2) = \frac{1}{1-x_1-x_2}$, das n-te ($n \in \mathbb{N}$) Taylorpolynom im Punkte $(0,0)^T$.

(b) (2 Punkte) Bestimme von der Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ das Taylorpolynom 2-ter Ordnung im Punkt $(1,1)^T$.

Aufgabe 4. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle, und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei auf $D := I \times J$ stetige Funktionen. Dann ist die Gleichung

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \tag{1}$$

eine Differentialgleichung zur Bestimmung einer unbekannten Funktion $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $I_0 \subset I$ und $y(x) \in J$ für alle $x \in I_0$. Genauer heißt so eine Funktion $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), falls y auf I_0 differenzierbar ist und falls

$$f(x, y(x)) + g(x, y(x))y'(x) = 0 \qquad \forall x \in I_0.$$

Es sei $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar auf D, und

$$G_x = f \qquad \text{und} \qquad G_y = g \quad \text{auf } D. \tag{2}$$

In diesem Fall nennt man die Differentialgleichung (1) *exakt*.

(a) (2 Punkte) Zeige: Falls $y(x)$, wie oben beschrieben, eine Lösung von (1) ist, dann gilt

$$G(x, y(x)) \equiv C \qquad \forall\, x \in I_0 \quad (\text{für ein } C \in \mathbb{R}).$$

(b) (1 Punkt) Zeige: Ist $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Teilintervall $I_0 \subset I$ differenzierbare Funktionen, so dass $y(x)$ eine Lösung der Gleichung

$$G(x, y(x)) \equiv C \qquad \forall\, x \in I_0$$

für irgend ein $C \in \mathbb{R}$ ist, dann ist $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von der Differentialgleichung (1).

(c) (1 Punkt) Zusätzlich seien jetzt f und g stetig partiell differenzierbar auf D. Zeige: Falls es eine differenzierbare Funktion $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (2) gibt, dann gilt

$$f_y(x,y) = g_x(x,y) \qquad \forall\, (x,y)^T \in D.$$

(d) (2 Punkte) Finde ein Beispiel für zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, für welche es keine differenzierbare Funktion $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $G_x = f$ und $G_y = g$ auf D gibt.

(e) (2 Punkte) Bestimme, ob die Differentialgleichung

$$2xy + x^2 y' = 0 \qquad \forall\, (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$$

eine exakte Differentialgleichung ist. Bestimme in diesem Fall für ein $C \in \mathbb{R}$ alle Intervalle I_0, auf denen es eine Lösung $y : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt.