

DIE ÜBUNGSBLÄTTER SIND IN ZWEIERGRUPPEN ZU BEARBEITEN UND
VOR BEGINN DER ÜBUNG ABZUGEBEN!



UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2017

Prof. Dr. A. Dall'Acqua Marie-Luise Hein Sommersemester 2017 Punktzahl: 30

Übungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Serie 3

1. Wir betrachten folgende Verallgemeinerung der logistischen Gleichung $y' = g(y)y$ mit $y(0) = y_0$, wobei $y = y(t)$ die Größe einer Population (z.B. einer Bakterienkultur) in Abhängigkeit von der Zeit, naturgemäß $y_0 \geq 0$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion sei.

Anmerkung: $g(y) = a - by$ liefert die logistische Gleichung.

- (a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem in einer Umgebung von $t = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt. (4)

- (b) Beweisen Sie, dass diese Lösung $y(t)$ im gesamten Existenzintervall $[0, t_+)$ nicht-negativ bleibt. (4)

2. Sei $w \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R})$ mit $w(t_0) \geq 0$ und es gelte für alle $t \in [t_0, t_1]$ die Ungleichung $\dot{w}(t) \leq -c_1 w(t) + c_2$, wobei $c_1, c_2 > 0$ gegebene Konstanten sind. Beweisen Sie für alle $t \in [t_0, t_1]$ die Abschätzung $w(t) \leq w(t_0) + c_2/c_1$.

Hinweis: Nutzen Sie eine ähnliche Strategie wie im Beweis des Gronwall-Lemmas 3.4. (4)

3. Man berechne eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$, die von der Lösung $y \equiv 1$ verschieden ist. Überlegen Sie sich, ob das ein Widerspruch zum Satz 2.2 ist und begründen Sie das Ergebnis. (4)

4. Genügen folgende Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ einer lokalen oder globalen Lipschitzbedingung? Die Antwort ist zu begründen!

- (a) $f(t, y) = e^{t^2}y$, (3)

- (b) $f(t, y) = \arctan(t^2 + y)$. (3)

5. Man zeige, dass folgende Anfangswertprobleme eine eindeutige lokale Lösung besitzen:

- (a) $x'' + \omega \sin x + \alpha x' = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, mit $\alpha, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, (4)

- (b) $y'(x) = y(x) - 2x/y(x)$ mit $y(1/2) = \sqrt{2}$. (4)