



Elementare Funktionentheorie: Blatt 5

15. Bestimme das maximale Gebiet, auf dem folgende formale Laurentreihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2)!};$ (1)

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{5 e^{|n|}};$ (1)

(c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 2^n (z-1)^{5n}.$ (2)

16. Bestimme diejenige Laurentreihendarstellung von f im Entwicklungspunkt z_0 , die in einer punktierten Umgebung von z_0 konvergiert, und gib den Konvergenzbereich an:

(a) $f(z) := \frac{e^z}{z^{17}}, z_0 := 0;$ (1)

(b) $f(z) := \frac{z}{(z-1)(z-3)}, z_0 := 1;$ (2)

(c) $f(z) := \frac{(e^z - 1)^2}{(z-1)^2}, z_0 := 1.$ (2)

17. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und seien f, g und h holomorphe Funktionen auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\text{ord}(f; z_0) \in \mathbb{Z}$, $\text{ord}(g; z_0) \in \mathbb{Z}$ und $\text{ord}(h; z_0) = -\infty$. Zeige:

(a) $\text{ord}(fg; z_0) = \text{ord}(f; z_0) + \text{ord}(g; z_0);$ (1)

(b) $\text{ord}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \text{ord}(f; z_0) - \text{ord}(g; z_0);$ (1)

(c) $\text{ord}(fh; z_0) = -\infty;$ (2)

(d) $\text{ord}(f+g; z_0) \geq \min\{\text{ord}(f; z_0), \text{ord}(g; z_0)\};$ (1)

(e) Im Allgemeinen ist $\text{ord}(f+g; z_0) \neq \min\{\text{ord}(f; z_0), \text{ord}(g; z_0)\};$ (1)

(f) Ist $\text{ord}(f; z_0) \neq \text{ord}(g; z_0)$, so gilt $\text{ord}(f+g; z_0) = \min\{\text{ord}(f; z_0), \text{ord}(g; z_0)\}.$ (1)

18. Gib die Art der Singularität von f bei z_0 an und bestimme $\text{ord}(f; z_0)$:

(a) $f(z) := \frac{1}{\sin^{13} z}, z_0 := 0;$ (1)

(b) $f(z) := \frac{z^2(z-1)^2}{e^{z-1}-1}, z_0 := 1;$ (1)

(c) $f(z) := \frac{z^7+1}{z^7} + \frac{\sin(z)\cos(z)}{z^6}, z_0 := 0;$ (1)

(d) $f(z) := \sin \frac{1}{z}, z_0 := 0.$ (1)