



Elemente der Topologie: Blatt 1

1. Sei Ω eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Entscheide, welche der folgenden Mengensysteme Topologien auf Ω sind:
 - (a) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)
 - (b) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)
 - (c) $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O \text{ unendlich}\} \cup \{\emptyset\}$. (3)

2. Zeige, dass folgende Mengensysteme topologische Basen auf $\mathbb{R}$ sind und vergleiche die erzeugten Topologien bezüglich ihrer Feinheit: (11)
 - (a) $\mathcal{B}_1 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (*euklidische Topologie*)
 - (b) $\mathcal{B}_2 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (*Sorgenfrey-Topologie* oder *lower limit topology*)
 - (c) $\mathcal{B}_3 := \{(a, b) \setminus A : a, b \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R} \text{ höchstens abzählbar}\}$
 - (d) $\mathcal{B}_4 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$
 - (e) $\mathcal{B}_5 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$
 - (f) $\mathcal{B}_6 := \{E^c : E \subset \mathbb{R} \text{ endliche Menge}\}$

3. Bestimme alle Topologien auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$! (+5)
Tipp: Es gibt genau 29 Topologien auf Ω . Es ist also hilfreich, bei der Auflistung systematisch vorzugehen.