



---

## Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 8

---

Wegen Pfingstmontag findet wird die Übung am 14. Juni durch eine Vorlesungsstunde ersetzt. Für die Bearbeitung dieses Blattes stehen somit zwei Wochen zur Verfügung.

25. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum. Zeige:

- (a) Ist  $Y$  ein Hausdorff-Raum und  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig, so ist  $f$  ein Homöomorphismus. (3)

**Lösung:** Wir müssen zeigen, dass  $f^{-1}$  stetig ist. Sei dazu  $A \subset X$  abgeschlossen. Weil  $X$  kompakt ist, ist  $A$  kompakt. Daher ist  $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  kompakt und insbesondere abgeschlossen in  $Y$ , da  $Y$  ein Hausdorff-Raum ist. Wir haben die Stetigkeit von  $f^{-1}$  gezeigt.

- (b) Es gibt keine Hausdorff-Topologie  $\tilde{\mathcal{T}}$  auf  $X$  mit  $\tilde{\mathcal{T}} \subsetneq \mathcal{T}$ . (3)

**Lösung:** Sei  $\tilde{\mathcal{T}}$  eine Hausdorff-Topologie auf  $X$  mit  $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ . Dann ist die Identität stetig von  $(X, \mathcal{T})$  nach  $(X, \tilde{\mathcal{T}})$ . Nach dem vorigen Aufgabenteil ist diese Abbildung ein Homöomorphismus, was  $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$  zeigt.

26. Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Hausdorff-Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion. Zeige, dass der Graph  $G(f)$  von  $f$  genau dann in  $X \times Y$  abgeschlossen ist, wenn  $f$  stetig ist! (3)

**Lösung:** Ist  $f$  stetig, so ist  $G(f)$  nach Aufgabe 21 abgeschlossen. Sei nun also  $G(f)$  abgeschlossen. Weil  $X \times Y$  nach dem Satz von Tychonoff kompakt ist, ist  $G(f)$  kompakt. Da die Abbildung  $(x, f(x)) \mapsto x$  nach Aufgabe 21 bijektiv und stetig ist, ist sie nach der vorigen Aufgabe sogar ein Homöomorphismus. Aus Aufgabe 21 folgt nun die Stetigkeit von  $f$ .

27. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir vergleichen einige Kompaktheitsbegriffe für  $X$ . Zeige:

- (a) Ist  $X$  folgenkompakt, so ist  $X$  *abzählbar kompakt*, d.h. jede abzählbare offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (3)

**Bemerkung:** Trivialerweise ist jeder kompakte Raum abzählbar kompakt.

**Lösung:** Wir nehmen an,  $X$  sei folgenkompakt, aber nicht abzählbar kompakt. Sei  $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ohne endliche Teilüberdeckung. Dann gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in X$  mit  $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n O_i$ . Insbesondere enthält jede der Mengen  $O_i$  nur endlich viele Folgenglieder. Sei  $(x_{n_k})$  eine konvergente Teilfolge von  $(x_n)$  mit Grenzwert  $x \in X$ . Dann gibt es ein  $i_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x \in O_{i_0}$ . Wegen Konvergenz gilt  $x_{n_k} \in O_{i_0}$  für alle  $k \geq k_0$ , also  $x_n \in O_{i_0}$  für unendlich viele  $n$  im Widerspruch zur Wahl von  $(x_n)$ .

- (b) Ist  $X$  abzählbar kompakt, so ist  $X$  *Häufungspunktkompakt*, d.h. jede unendliche Teilmenge von  $X$  besitzt einen Häufungspunkt. (3)

**Lösung:** Es gebe in  $X$  eine unendliche Menge  $M$  ohne Häufungspunkt. Wir dürfen annehmen, dass  $M$  abzählbar ist, denn anderenfalls können wir zu einer abzählbaren Teilmenge von  $M$  übergehen, die dann ebenfalls keinen Häufungspunkt besitzt. Insbesondere ist jeder Punkt von  $M$  isoliert. Es gibt also zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung  $U_x \in \mathcal{U}(x)$  mit  $U_x \cap M = \{x\}$ . Da  $M$  seine Häufungspunkte enthält, ist

$M$  nach Lemma 3.10 abgeschlossen. Folglich ist auch  $U_0 := M^c$  offen. Insgesamt ist also  $X = \bigcup_{x \in M} U_x \cup U_0$  eine abzählbare offene Überdeckung von  $X$ . Diese besitzt keine endliche Teilüberdeckung, da für jedes  $x \in M$  nach Konstruktion  $x \notin \bigcup_{y \neq x} U_y \cup U_0$  gilt. Also ist  $X$  nicht abzählbar kompakt.

- (c) Ist  $X$  abzählbar kompakt, so ist  $X$  *pseudokompakt*, d.h. jede stetige Funktion von  $f$  nach  $\mathbb{R}$  ist beschränkt. (3)

**Lösung:** Sei  $X$  abzählbar kompakt und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Menge  $O_n := f^{-1}((-n, n))$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  offen und es gilt  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Wegen abzählbarer Kompaktheit gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $O_{n_0} = \bigcup_{n=1}^{n_0} O_n = X$ , also  $|f(x)| \leq n_0$  für alle  $x \in X$ . Dies zeigt die Beschränktheit von  $f$ .

**Information:** Es gibt noch weitere Kompaktheitsbegriffe, beispielsweise die *Parakompaktheit*, die *Metakompaktheit* und die *Orthokompaktheit*.

28. (a) Sei  $X := \{f \in [0, 1]^{[0, 1]} : f(t) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } t \in [0, 1]\}$  mit der Spurtopologie von  $[0, 1]^{[0, 1]}$  versehen. Zeige, dass  $X$  folgenkompakt, aber nicht kompakt ist! (3)

**Lösung:** Betrachten wir  $X$  als Teilraum von  $[0, 1]^{[0, 1]}$ , so ist  $X$  nicht abgeschlossen; wie in der Vorlesung sieht man leicht, dass die konstante Funktion  $\mathbb{1}_{[0, 1]}$  im Abschluss von  $X$ , aber nicht in  $X$  liegt. Weil  $[0, 1]^{[0, 1]}$  ein Hausdorff-Raum ist, folgt daraus, dass  $X$  keine kompakte Teilmenge von  $[0, 1]^{[0, 1]}$  ist. Somit ist  $X$  laut Vorlesung kein kompakter topologischer Raum in der Spurtopologie.

Sei nun  $(f_n)$  eine Folge in  $X$ . Dann gibt es eine abzählbare Menge  $A \subset [0, 1]$  mit  $f_n(t) = 0$  für alle  $t \notin A$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere konvergiert  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $t \in [0, 1] \setminus A$  gegen 0. Zudem ist  $[0, 1]^A$  nach dem Satz von Tychonoff ein kompakter topologischer Raum, der als abzählbare Potenz von  $[0, 1]$  das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Somit hat die Folge  $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^A$  nach dem dritten Aufgabenteil eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_k}|_A)$  mit Grenzwert  $g \in [0, 1]^A$ . Definiert man nun  $f(t) := g(t)$  für  $t \in A$  und  $f(t) := 0$  für  $t \in [0, 1] \setminus A$ , so ist  $f \in X$  und es gilt  $f_{n_k}(t) \rightarrow f(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Das bedeutet gerade  $f_{n_k} \rightarrow f$  in der Topologie von  $X$ , womit die Folgenkompaktheit von  $X$  gezeigt ist.

**Bemerkung:** Die Konvergenz einer Teilfolge auf  $A$  könnte man auch direkter mit einem Diagonalfolgenargument schlussfolgern.

- (b) Sei  $I := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  die Menge aller Binärfolgen. Zeige, dass  $\{0, 1\}^I$  kompakt, aber nicht folgenkompakt ist! Hierbei ist wie üblich  $\{0, 1\}$  mit der diskreten Topologie und  $\{0, 1\}^I$  mit der entsprechenden Produkttopologie versehen. (3)

**Tipp:** Betrachte die Folge  $(x_n) \subset \{0, 1\}^I$ , die durch  $x_n((b_i)_{i \in \mathbb{N}}) := b_n$  gegeben ist.

**Lösung:** Weil  $\{0, 1\}$  kompakt ist, ist nach dem Satz von Tychonoff der Raum  $\{0, 1\}^I$  kompakt. Sei nun  $(x_n)$  wie im Tipp. Wir nehmen an,  $(x_n)$  besitze eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ . Das bedeutet, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}((b_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k}$$

für alle  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in I$  existiert. Dies ist offenbar falsch, wie man anhand der durch

$$b_i := \begin{cases} 1, & i = n_{2k} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierten Binärfolge sieht.

- (c) Erfüllt ein kompakter topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er folgenkompakt. (3)

**Lösung:** Sei  $X$  kompakt und erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X$ . Dann besitzt  $(x_n)$  laut Vorlesung einen Häufungswert  $x \in X$ . Sei  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ , wobei wir laut Vorlesung ohne Einschränkung  $B_{k+1} \subset B_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  annehmen dürfen. Nach Definition eines Häufungswerts finden wir induktiv Indizes  $(n_k)$  mit  $n_{k+1} > n_k$  und  $x_{n_k} \in B_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Also konvergiert die Teilfolge  $(x_{n_k})$  gegen  $x$ .

- (d) Erfüllt ein folgenkompakter topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist er kompakt. (3)

**Lösung:** Sei  $X$  folgenkompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sei  $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Nach Satz 5.7 gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung  $(O_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Nach der vorigen Aufgabe ist  $X$  abzählbar kompakt. es gibt also eine endliche Teilüberdeckung  $(O_{\alpha_n})_{1 \leq n \leq N}$  der abzählbaren Überdeckung  $(O_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , also eine endliche Teilüberdeckung von  $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ . Dies zeigt die Kompaktheit von  $X$ .