Universität Ulm

Abgabe: Montag, 25.07.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 90

Lösungen Elemente der Topologie: Klausur 1

1. (a) Definieren Sie den Begriff *topologische Basis*! (10)

Lösung: Sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt topologische Basis, falls es zu jedem $x \in \Omega$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in \mathcal{B}$ gibt und es zu je zwei Mengen B_1 und B_2 in $\mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ ein $B_0 \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2$.

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine topologische Basis über dem Grundraum $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Definitionen, dass

$$\mathcal{T} \coloneqq \{O \subset \Omega \mid \forall x \in O \; \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset O\}$$

eine Topologie auf Ω ist! (10)

Lösung: Es ist $\emptyset \in \mathcal{T}$, da es kein $x \in \emptyset$ gibt, die Bedingung in $\mathcal{T}$ also leer ist. Es ist $\Omega \in \mathcal{T}$ nach dem ersten Teil der Definition einer Basis.

Seien nun $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{T}$ und $O \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Zu $x \in O$ gibt es dann $\alpha_0 \in I$ mit $x \in O_{\alpha_0}$. Wegen $O_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset O_{\alpha_0} \subset O$, was $O \in \mathcal{T}$ zeigt.

Seien nun O_1 und O_2 in $\mathcal{T}$ und $O \coloneqq O_1 \cap O_2$. Zu $x \in O$ gibt es $B_1 \in \mathcal{B}$ und $B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1 \subset O_1$ und $x \in B_2 \subset O_2$. Es gibt $B_0 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2 \subset O$. Somit ist $O \in \mathcal{T}$.

2. (a) Definieren Sie den Begriff *normaler topologischer Raum*! (10)

Lösung: Ein Hausdorff-Raum X heißt normal, falls es zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen A_1 und A_2 von X mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ offene Mengen O_1 und O_2 gibt mit $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

(b) Sei X ein Hausdorff-Raum. Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jeder stetigen Funktion $f\colon A \to [0,1]$ gebe es eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,1]$ mit $g|_A = f$. Zeigen Sie, dass X normal ist! (10)

Lösung: Seien A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann ist $A \coloneqq A_1 \cup A_2$ auch abgeschlossen und $f\colon A \to [0,1]$ definiert durch $f(x) \coloneqq 0$ für $x \in A_1$ und $f(x) \coloneqq 1$ für $x \in A_2$ ist wohldefiniert. Es ist nach Definition sofort klar (und folgt auch aus dem Klebelemma, Aufgabe 16), dass f stetig auf A ist. Sei g eine stetige Fortsetzung von f auf X und setze $O_1 \coloneqq g^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ und $O_2 \coloneqq g^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$. Dann sind O_1 und O_2 offen und es gilt $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

3. (a) Definieren Sie den Begriff *gerichtete Menge*! (10)

Lösung: Eine Menge I heißt gerichtet bezüglich einer Relation $\leq$, falls $\leq$ reflexiv ($i \leq i$ für alle $i \in I$) und transitiv ($i \leq j$ und $j \leq k$ impliziert $i \leq k$) ist und je zwei Elemente von I eine obere Schranke besitzen (zu i und j in I gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$).

(b) Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum Ω und x ein Häufungswert von $(x_i)_{i\in I}$. Zeigen Sie, dass ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$ gegen x konvergiert! (10)

Lösung: Setze $J \coloneqq \{(i,U) : i \in I,\ U \in \mathcal{U}(x)\}$. Dann ist J eine gerichtete Menge bezüglich $(i_1, U_1) \geq (i_2, U_2)$ genau dann, wenn $i_1 \geq i_2$ und $U_1 \subset U_2$. Reflexivität und

Transitivität sind offensichtlich, und zu (i_1, U_1) und (i_2, U_2) ist (i_0, U_0) eine obere Schranke, wobei i_0 eine obere Schranke von i_1 und i_2 sei und $U_0 := U_1 \cap U_2$ gesetzt wird.

Nach Definition eines Häufungswerts gibt es zu jedem $j := (i, U) \in J$ ein $f(j) \in I$ mit $f(j) \geq i$ und $x_{f(j)} \in U$. Die Abbildung $f\colon J \to I$ kofinal ist, denn zu $i_0 \in I$ gilt $f(j) \geq i_0$ für alle $j \geq j_0 := (i_0, \Omega) \in J$. Also ist $(x_{f(j)})_{j\in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$. Es gilt $x_{f(j)} \to x$, denn ist $U_0 \in \mathcal{U}(x)$, so gilt $x_{f(j)} \in U \subset U_0$ für alle $j = (i, U) \geq j_0 := (i_0, U_0)$, wobei $i_0 \in I$ beliebig gewählt ist.

4. Sei $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen, wobei $\{0, 1\}$ jeweils die diskrete Topologie $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ trage. Der Linksshift $\ell\colon X \to X$ ist mittels $\ell((b_k)_{k\in\mathbb{N}}) := (b_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie, dass ℓ stetig ist. (10)

Lösung: Sei $\pi_n\colon X \to \{0, 1\}$ die Projektion in die n.te Koordinate. Dann gilt $\pi_n \circ f = \pi_{n+1}$ nach Definition von f. Also ist $\pi_n \circ f$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, womit die Stetigkeit von f aus den Sätzen über die Produkttopologie folgt.

5. Zeigen Sie, dass es eine Folge gibt, die einen Häufungswert, aber keine konvergente Teilfolge besitzt, indem Sie eine solche explizit angeben und durch Verweis auf die entsprechenden Resultate aus der Vorlesung oder Übung begründen, dass sie die gewünschten Eigenschaften hat! (10)

Lösung: Sei $I := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $X := \{0, 1\}^I$. In der Übung wurde nachgewiesen, dass die durch $x_n((b_i)_{i\in\mathbb{N}}) := b_n$ definierte Folge (x_n) in X keine konvergente Teilfolge besitzt. Da sie aber ein Netz in dem kompakten Raum X ist, besitzt sie laut Vorlesung einen Häufungswert.

6. Sei X ein topologischer Raum, $Y \neq \emptyset$ eine Menge und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Funktion. Der Raum Y sei bezüglich der von f vorwärts induzierten Topologie zusammenhängend und zudem sei $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ eine zusammenhängende Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass dann X zusammenhängend ist! (10)
Erinnerung: Die von f vorwärts induzierte Topologie ist $\{O \subset Y : f^{-1}(O) \subset X \text{ offen}\}$.
Anleitung: Seien O_1 und O_2 offen mit $X = O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Mengen $U_k := \{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset O_k\}$ offen sind und $U_1 \cup U_2 = Y$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ erfüllen!

Lösung: Seien O_1 und O_2 offene Teilmengen von X mit $X \subset O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Für jedes $y \in Y$ gilt dann für $X_y := f^{-1}(\{y\})$ offenbar $X_y \subset O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 \cap X_y = \emptyset$. Weil X_y nach Voraussetzung zusammenhängend ist, folgt daraus, dass entweder $X_y \subset O_1$ oder $X_y \subset O_2$ gilt.

Sei $U_1 := \{y \in Y : X_y \subset O_1\}$ und $U_2 := \{y \in Y : X_y \subset O_2\}$. Dann ist $U_1 \cup U_2 = Y$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Zudem ist

$$f^{-1}(U_1) = \bigcup_{y\in U_1} f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y\in U_1} X_y \subset O_1$$

und analog dazu $f^{-1}(U_2) \subset O_2$. Wegen $f^{-1}(U_1 \cup U_2) = X = O_1 \cup O_2$ folgt $f^{-1}(U_1) = O_1$ und $f^{-1}(U_2) = O_2$. Nach Wahl der Topologie von Y sind U_1 und U_2 also offene Mengen.

Weil Y zusammenhängend ist, folgt aus den obigen Überlegungen $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$, also $O_1 = f^{-1}(U_1) = \emptyset$ oder $O_2 = f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Wir haben gezeigt, dass X nicht unzusammenhängend ist.