



Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 6

24. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator B . Zeige:
- (a) Die Einschränkung $(S_1(t))_{t \geq 0} := (S(t)|_{D(B)})_{t \geq 0}$ ist eine C_0 -Halbgruppe auf $D(B)$ bezüglich der Graphennorm.
 - (b) Der Generator B_1 von S_1 erfüllt $D(B_1) = D(B^2)$ und $B_1 x = Bx$ für $x \in D(B_1)$.
 - (c) Der Unterraum $D(B^2)$ ist dicht in X .
25. Seien V und H Hilberträume, $V \hookrightarrow_d H$, a eine bilineare, stetige, H -elliptische Form auf V , $A \sim a$, und $(S(t))_{t \geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe.
- (a) Es gilt $D(A) \hookrightarrow V$, wobei $D(A)$ mit der Graphennorm versehen sei.
 - (b) Ist $u_0 \in D(A^2)$, so ist $S(\cdot)u_0 \in C^1([0, \infty); V)$.
26. (a) Sei $C_{2\pi}$ der Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, und sei $(S(t)f)(x) := f(x+t)$. Zeige, dass $(S(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $C_{2\pi}$ ist und bestimme ihren Generator!
- (b) Sei Ω ein σ -endlicher Maßraum und $m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte messbare Funktion. Zeige, dass $(S(t)u)(x) := e^{tm(x)} u(x)$ für $1 \leq p < \infty$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$ definiert und bestimme ihren Generator!
27. Sei X ein separabler Banachraum und $f: [a, b] \rightarrow X$ Riemann-integrierbar. Zeige, dass f auch (Bocher-)integrierbar ist und die beiden Integrale übereinstimmen!
- Hinweis:** Man darf verwenden, dass jede skalarwertige Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist und die Integrale übereinstimmen.
28. Sei H ein separabler Hilbertraum und $(e_n)_{n=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis von H . Definiere $f(t) := \frac{2^{n+1}}{n+1} e_n$ für $t \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ und $f(0) := 0$. Zeige, dass es ein $y \in H$ mit $\langle x', y \rangle = \int_0^1 \langle x', f(t) \rangle dt$ für alle $x' \in H'$ gibt; insbesondere ist zu zeigen, dass $\langle x', f(\cdot) \rangle$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar?