



Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 6

24. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator B . Zeige:

- (a) Die Einschränkung $(S_1(t))_{t \geq 0} := (S(t)|_{D(B)})_{t \geq 0}$ ist eine C_0 -Halbgruppe auf $D(B)$ bezüglich der Graphennorm.

Lösung: Laut Vorlesung lässt $S(t)$ den Raum $D(B)$ invariant. Die Halbgruppengleichung vererbt sich natürlich auf die Einschränkung. Für die starke Stetigkeit ist nur noch zu zeigen, dass $BS(t)x$ für $t \rightarrow 0$ in X gegen Bx konvergiert, da $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$ in X bereits klar ist. Dies folgt aber aus $BS(t)x = S(t)Bx$ und der starken Stetigkeit von S in X .

- (b) Der Generator B_1 von S_1 erfüllt $D(B_1) = D(B^2)$ und $B_1x = Bx$ für $x \in D(B_1)$.

Lösung: Ist $x \in D(B^2)$, also $Bx \in D(B)$, so gilt

$$\frac{BS(t)x - Bx}{t} = \frac{S(t)Bx - Bx}{t} \rightarrow B^2x = B(Bx)$$

für $t \rightarrow 0$, was $D(B^2) \subset D(B_1)$ und $B_1x = Bx$ zeigt, denn $\frac{S(t)x - x}{t} \rightarrow Bx$ ist für $x \in D(B^2)$ klar.

Ist umgekehrt $x \in D(B_1)$, so konvergiert insbesondere $\frac{BS(t)x - Bx}{t} = \frac{S(t)Bx - Bx}{t}$ für $t \rightarrow 0$, was $Bx \in D(B)$, also $x \in D(B^2)$ zeigt. Somit ist $D(B_1) = D(B^2)$.

- (c) Der Unterraum $D(B^2)$ ist dicht in X .

Lösung: Als Definitionsbereich eines Generators ist $D(B_1)$ dicht in $D(B)$ versehen mit der Graphennorm. Insbesondere ist $D(B^2)$ dicht in $D(B)$ bezüglich der Norm von X . Weil aber $D(B)$ dicht in X ist, folgt, dass $D(B^2)$ ebenfalls dicht in X ist.

25. Seien V und H Hilberträume, $V \hookrightarrow_d H$, a eine bilineare, stetige, H -elliptische Form auf V , $A \sim a$, und $(S(t))_{t \geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe.

- (a) Es gilt $D(A) \hookrightarrow V$, wobei $D(A)$ mit der Graphennorm versehen sei.

Lösung: Für $u \in D(A)$ ist nach Definition $u \in V$ und es gilt

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_V^2 &\leq \omega \|u\|_H^2 + a(u, u) = \omega \|u\|_H^2 + (Au | u)_H \\ &\leq \omega \|u\|_H^2 + \|Au\|_H \|u\|_H \leq c(\omega \|u\|_H + \|Au\|_H) \|u\|_V, \end{aligned}$$

wobei c die Einbettungskonstante von V in H bezeichnet. Also ist

$$\|u\|_V \leq \frac{c(\omega + 1)}{\alpha} (\|u\|_H + \|Au\|_H) = \frac{c(\omega + 1)}{\alpha} \|u\|_{D(A)},$$

was $D(A) \hookrightarrow V$ zeigt.

- (b) Ist $u_0 \in D(A^2)$, so ist $S(\cdot)u_0 \in C^1([0, \infty); V)$.

Lösung: Sei $u_0 \in D(A^2)$. Nach der vorigen Aufgabe definiert $u(t) := S(t)u_0$ eine Funktion in $C^1([0, \infty); D(A))$. Weil die Einbettung $\iota: D(A) \rightarrow V$ nach dem vorigen Aufgabenteil stetig ist, folgt aus Aufgabe 3 (b) die Differenzierbarkeit von $u: [0, \infty) \rightarrow V$ mit der gleichen Ableitung wie als Funktion $u: [0, \infty) \rightarrow D(A)$. Weil u' sogar stetig mit Werten in $D(A)$ ist, ist u als Funktion mit Werten in V stetig differenzierbar.

26. (a) Sei $C_{2\pi}$ der Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, und sei $(S(t)f)(x) := f(x+t)$. Zeige, dass $(S(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $C_{2\pi}$ ist und bestimme ihren Generator!

Lösung: Die Invarianz von $C_{2\pi}$, die Stetigkeit des Operators und das Halbgruppengesetz sind offensichtlich. Für die starke Stetigkeit muss man nur beobachten, dass jede Funktion $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig stetig ist.

Bezeichne B den Generator von S . Wir zeigen $D(B) = C_{2\pi}^1$ und $Bf = f'$. Sei zuerst $f \in C_{2\pi}^1$. Dann ist $S(\cdot)f'$ stetig und daher Riemann-integrierbar in $C_{2\pi}$ und es gilt

$$\int_0^t (S(s)f')(x) ds = \int_0^t f'(x+s) ds = f(x+t) - f(x)$$

für jedes feste $x \in \mathbb{R}$. Also muss $\int_0^t S(s)f' = S(t)f - f$ gelten, was nach der Allweltsformel $f \in D(B)$ und $Bf = f'$ zeigt.

Ist nun umgekehrt $f \in D(B)$, so konvergiert

$$\frac{(S(t)f)(x) - f(x)}{t} = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

für $t \rightarrow 0$ (sogar gleichmäßig in x) gegen eine stetige Funktion, die dann natürlich f' ist. Also ist $f \in C_{2\pi}^1$ und $Bf = f'$.

Bemerkung: Man kann die Verwendung der Allweltsformel auch umgehen. Um die gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten zu zeigen, kann man auch mit dem Mittelwertsatz und der gleichmäßigen Stetigkeit von f' argumentieren.

- (b) Sei Ω ein σ -endlicher Maßraum und $m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte messbare Funktion. Zeige, dass $(S(t)u)(x) := e^{tm(x)}u(x)$ für $1 \leq p < \infty$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$ definiert und bestimme ihren Generator!

Lösung: Die Invarianz von $L^p(\Omega)$ und die Stetigkeit des Operators folgen aus der Tatsache, dass e^{tm} für $t \geq 0$ beschränkt ist. Das Halbgruppengesetz folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Die starke Stetigkeit der Halbgruppe sieht man mittels des Satzes von Lebesgue.

Sei B der Generator von S . Wir zeigen $D(B) = \{u \in L^p(\Omega) : mu \in L^p(\Omega)\}$ und $Bu = mu$. Sei dazu $u \in D(B)$. Dann konvergiert

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{e^{tm}u - u}{t} = \frac{e^{tm} - 1}{t}u$$

für $t \rightarrow 0$ in $L^p(\Omega)$ und daher nach Teilfolge fast überall gegen Bu . Offenbar konvergiert der Ausdruck aber punktweise gegen $\frac{d}{dt} e^{tm} \Big|_{t=0} = m$. Also gilt $Bu = mu$ und insbesondere $mu \in L^p(\Omega)$.

Sei nun umgekehrt $u \in L^p(\Omega)$ und $mu \in L^p(\Omega)$. Dann konvergiert

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{e^{mt} - 1}{t}u = e^{\xi m} mu, \quad \xi = \xi(x, t) \in (0, t)$$

überall gegen mu und ist für $t \leq 1$ dominiert durch $(1 + e^m)mu \in L^p(\Omega)$. Also konvergiert nach dem Satz von Lebesgue $\frac{S(t)u - u}{t}$ in $L^p(\Omega)$ gegen mu , was $u \in D(B)$ und $Bu = m$ zeigt.

27. Sei X ein separabler Banachraum und $f: [a, b] \rightarrow X$ Riemann-integrierbar. Zeige, dass f auch (Bocher-)integrierbar ist und die beiden Integrale übereinstimmen!

Hinweis: Man darf verwenden, dass jede skalarwertige Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist und die Integrale übereinstimmen.

Lösung: Sei $f: [a, b] \rightarrow X$ Riemann-integrierbar. Dann ist $\langle x', f(\cdot) \rangle$ nach Aufgabe 2 (b) für jedes $x' \in X'$ Riemann-integrierbar und daher laut Hinweis messbar. Zudem ist f

beschränkt, wie man mit den gleichen Methoden wie in Analysis 1 sehen kann, also $\|f(\cdot)\| \in L^\infty(a, b)$. Nach Definition ist f somit integrierbar. Zudem gilt laut Hinweis

$$\left\langle x', \int_a^b f \right\rangle = \int_a^b \langle x', f \rangle = \int_{[a,b]} \langle x', f \rangle$$

für das Riemann-Integral $\int_a^b$ und das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]}$, was zeigt, dass das Riemann-Integral die definierende Eigenschaft des Bochner-Integrals erfüllt.

28. Sei H ein separabler Hilbertraum und $(e_n)_{n=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis von H . Definiere $f(t) := \frac{2^{n+1}}{n+1} e_n$ für $t \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ und $f(0) := 0$. Zeige, dass es ein $y \in H$ mit $\langle x', y \rangle = \int_0^1 \langle x', f(t) \rangle dt$ für alle $x' \in H'$ gibt; insbesondere ist zu zeigen, dass $\langle x', f(\cdot) \rangle$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar?

Lösung: Weil $(\frac{1}{n+1})$ in ℓ^2 liegt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{e_n}{n+1}$. Es bezeichne y den Grenzwert.

Wir zeigen zuerst, dass $(x | f(\cdot))$ für jedes $x \in H$ in $L^1(0, 1)$ liegt. Die Messbarkeit ist offensichtlich. Für die Integrierbarkeit schreiben wir $x = \sum_{m=0}^\infty x_m e_m$ und berechnen

$$\int_0^1 |(x | f(t))| dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}|x_n|}{n+1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{|x_n|}{n+1} \leq \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{1/2} \|x\| < \infty.$$

Nun gilt

$$(x | y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x | e_n)}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}(x | e_n)}{n+1} dt = \int_0^1 (x | f(t)) dt$$

für alle $x \in H$. Andererseits ist aber

$$\int_0^1 \|f(t)\| dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}}{n+1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty,$$

also f nicht integrierbar.

Bemerkung: Gibt es ein y wie in der Aufgabenstellung, so nennt man f *schwach integrierbar* oder *Pettis-integrierbar*. Jede Bochner-integrierbare Funktion ist Pettis-integrierbar (für reflexive Räume wurde dies in der Vorlesung bewiesen). Andererseits gibt es in jedem unendlich-dimensionalen Banachraum Pettis-integrierbare Funktionen, die nicht Bochner-integrierbar sind. Für Hilberträume wurde dies hier bewiesen. Für allgemeine Banachräume kann man ähnlich vorgehen, benutzt dann aber den Satz von Dvoretzky-Rogers, der die Existenz einer unbedingt konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe mit Wert y garantiert. Definiert man f ähnlich wie oben, sieht man, dass $\|f(\cdot)\|$ nicht integrierbar ist, andererseits aber $\langle x', f(\cdot) \rangle$ integrierbar ist und den Integralwert $\langle x', y \rangle$ hat, da die zugehörige Reihe in $\mathbb{R}$ unbedingt (und damit absolut) konvergiert.