



Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 8

34. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $\alpha > 0$ und $m: \Omega \rightarrow [\alpha, \infty)$ messbar. Wir schreiben $V := L^2(\Omega, m \, d\mu)$ und $H := L^2(\Omega, d\mu)$. Zeige:
- (a) $V \hookrightarrow_d H$.
 - (b) Jede Funktion g in $L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})$ definiert mittels $\langle \varphi_g, v \rangle_{V', V} := \int_{\Omega} g v \, d\mu$ ein Funktional $\varphi_g \in V'$ und es gilt $\|\varphi_g\|_{V'} = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})}$.
 - (c) Zu jedem $\varphi \in V'$ existiert genau ein $g \in L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})$ mit $\varphi = \varphi_g$.
 - (d) Ist $m \in L^\infty(\Omega)$, so ist $V = H$.

Bemerkung: Beachte, dass für $u \in L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})$ und $v \in L^2(\Omega, d\mu)$ nach Definition

$$\langle u, v \rangle_{V', V} = (u \mid v)_H$$

gilt. Man identifiziert also V' mittels des Skalarprodukts von H mit $L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})$. In diesem Sinne ist der Gelfand-Dreier

$$V \hookrightarrow_d H \cong H' \hookrightarrow_d V'$$

als

$$L^2(\Omega, m \, d\mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \frac{d\mu}{m})$$

zu lesen.

35. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass für $x, y \in X$ aus $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ und $\|x - y\| \geq \varepsilon$ folgt, dass $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$ gilt. Zeige:
- (a) Ist X gleichmäßig konvex, so ist X auch strikt konvex, vgl. Aufgabe 9.
 - (b) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.
36. Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X , die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige:
- (a) $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
 - (b) Sei X gleichmäßig konvex. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$, so konvergiert (x_n) sogar in Norm gegen x .
37. Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{O}$ die Menge aller (mehrwertigen) Operatoren auf H , wobei $D(A) = \emptyset$ für $A \in \mathcal{O}$ zugelassen sei. Wir versehen $\mathcal{O}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus der Vorlesung. Sei $\mathcal{A}$ die Menge der akkretiven Operatoren in $\mathcal{O}$ und $\mathcal{M}$ die Menge der m-akkretiven Operatoren in $\mathcal{A}$.
- (a) Welche der Mengen $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$ sind Vektorräume?
 - (b) Welche der Mengen $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$ sind Kegel, enthalten also zu je zwei Elementen auch deren Summe und zu jedem Element auch die nicht-negativen Vielfachen?
 - (c) Gilt $\mathcal{M} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$?

- 38.** Sei H ein Hilbertraum und A m -akkretiv. Sei $T: H \rightarrow H$ akkretiv und Lipschitz-stetig. Zeige, dass $A + T$ ein m -akkretiver Operator ist!