

# Die Musik der Primzahlen, II

## Der Primzahlsatz und die Riemannsche Vermutung

Prof. Dr. Stefan Wewers

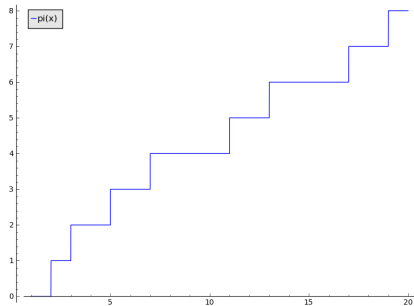
Institut für Algebra und Zahlentheorie  
Universität Ulm

23. April 2021

# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

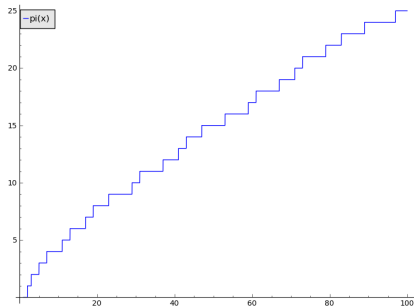
$\pi(x) :=$  Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$ .



# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

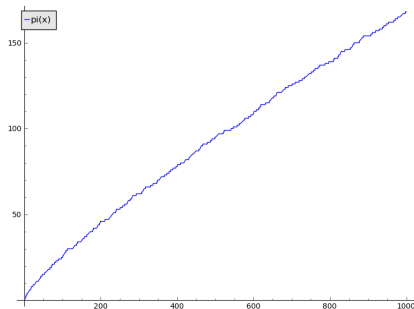
$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$



# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

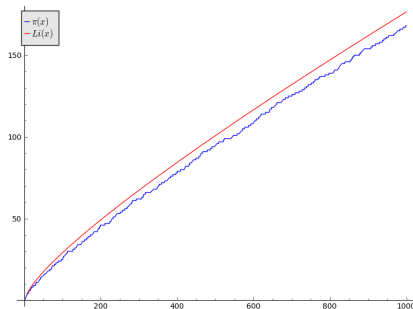
$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$



# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$\pi(x) :=$  Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$ .



Satz (Hadamard, de La Vallée Poussin, 1896)

$$\pi(x) \sim Li(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

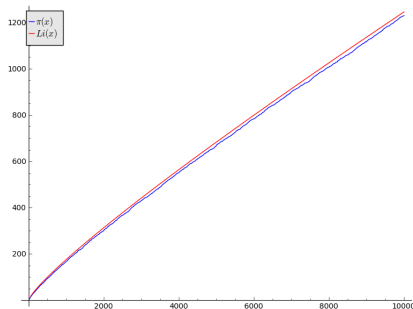
wobei

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}.$$

# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$\pi(x) :=$  Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$ .



Satz (Hadamard, de La Vallée Poussin, 1896)

$$\pi(x) \sim Li(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

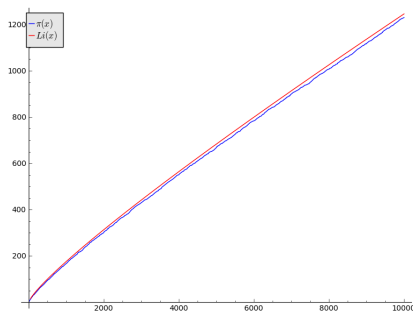
wobei

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}.$$

# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$$\pi(x) := \text{Anzahl der Primzahlen } p \leq x.$$



## Heuristische Interpretation

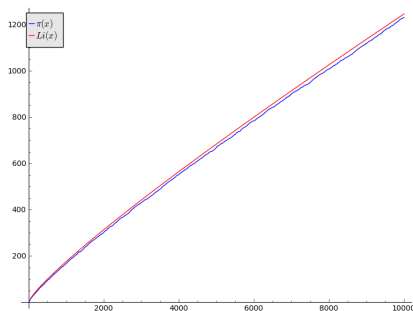
Die ‘Wahrscheinlichkeit’, dass eine zufällig gewählte Zahl  $n$  eine Primzahl ist, ist

$$P(n \in \mathbb{P}) \sim \frac{1}{\log(n)}.$$

# Rückblick: der Primzahlsatz

Sei

$\pi(x) :=$  Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$ .



Die Riemannsche Vermutung  
würde zeigen:

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log(x)).$$

# Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage *‘Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?’*:

# Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage *'Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?'*:

*Ich würde fragen, ob jemand die Riemannsche Vermutung gelöst hätte.*

# Rückblick: die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute nicht bewiesen und gilt als das größte offene Problem der Mathematik.

D. Hilbert (1862-1943) antwortete auf die Frage *'Wenn Sie in 500 Jahren wieder aufwachen würden, was würden Sie dann tun?'*:

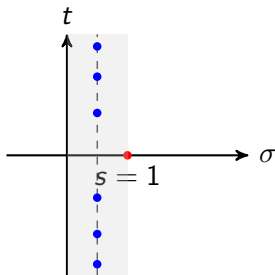
*Ich würde fragen, ob jemand die Riemannsche Vermutung gelöst hätte.*

Seit 2000 ist die R.V. eines der 7 mathematischen *Jahrtausendprobleme*, auf die vom *Clay Mathematics Institute* ein Preis von 1.000.000 \$ ausgeschrieben ist.

# Rückblick: Die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung macht eine Aussage über die Position der Nullstellen der **Riemannschen  $\zeta$ -Funktion**:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \stackrel{!}{=} \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$



Der Primzahlsatz ist äquivalent zu der Aussage, dass es keine Nullstellen mit Realteil  $\geq 1$  gibt!

# Die Musik der Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zur (bestmöglichen) Abschätzung des Fehlerterms im Primzahlsatz:

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| = \mathcal{O}(\sqrt{x} \log(x)).$$

# Die Musik der Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zur (bestmöglichen) Abschätzung des Fehlerterms im Primzahlsatz:

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| = \mathcal{O}(\sqrt{x} \log(x)).$$

Zitat von M.V. Berry (einem Physiker!):

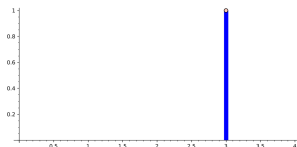
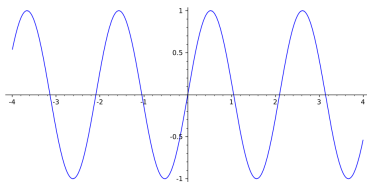
*..there is a sense in which we can give a one-line non-technical statement of the Riemann hypothesis: 'The primes have music in them!'*

# Fourier-Transformation

Eine (reine) Schwingung kann man mathematisch durch eine Sinus- oder Cosinusfunktion modellieren:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Dabei ist  $A$  die *Amplitude* ('Lautstärke') und  $\omega$  die *Frequenz* ('Tonhöhe').

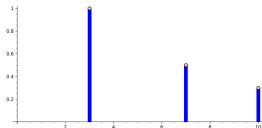
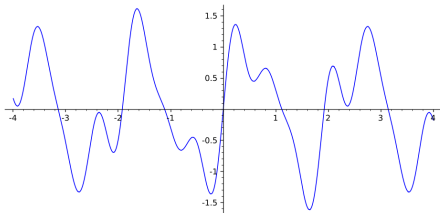


# Fourier-Transformation

Komplizierte Schwingungen erhält man als Überlagerungen von reinen Schwingungen:

$$f(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i \cdot t).$$

Die Menge der Frequenzen  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  heißt das *Spektrum* der Schwingung.



# Fouriertransformation

Im Prinzip läßt sich jedes Signal als eine Überlagerung von reinen Schwingungen darstellen. In der Nachrichtentechnik nennt man dies eine *Frequenzanalyse*.

# Fouriertransformation

Im Prinzip läßt sich jedes Signal als eine Überlagerung von reinen Schwingungen darstellen. In der Nachrichtentechnik nennt man dies eine *Frequenzanalyse*.

Die mathematische Theorie dahinter ist die *Fourieranalyse*. Die Umwandlung einer Zeitfunktion  $f(t)$  in eine Funktion auf dem Frequenzbereich (und zurück) nennt man *Fouriertransformation*.

# Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der  $\zeta$ -Funktion eine 'Frequenzanalyse' der Primzahlzählfunktion erhält.

# Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der  $\zeta$ -Funktion eine 'Frequenzanalyse' der Primzahlzählfunktion erhält. Das Ergebnis vereinfacht sich, wenn man anstelle von  $\pi(x)$  die Funktion

$$\psi(x) := \sum_{p^n \leq x} \log(p)$$

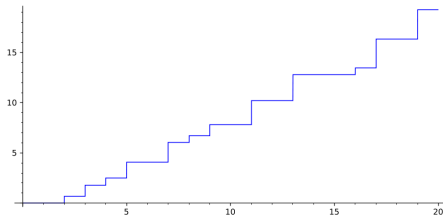
untersucht.

# Die Musik der Primzahlen?

Riemanns geniale Einsicht war, dass man mithilfe der  $\zeta$ -Funktion eine 'Frequenzanalyse' der Primzahlzählfunktion erhält. Das Ergebnis vereinfacht sich, wenn man anstelle von  $\pi(x)$  die Funktion

$$\psi(x) := \sum_{p^n \leq x} \log(p)$$

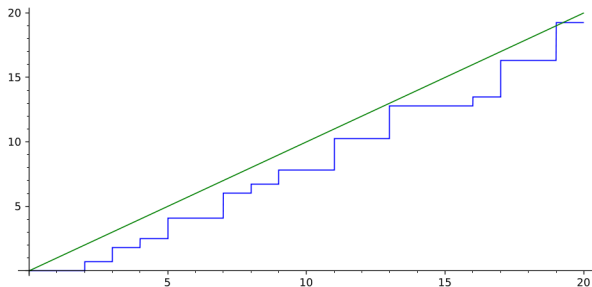
untersucht.



# Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

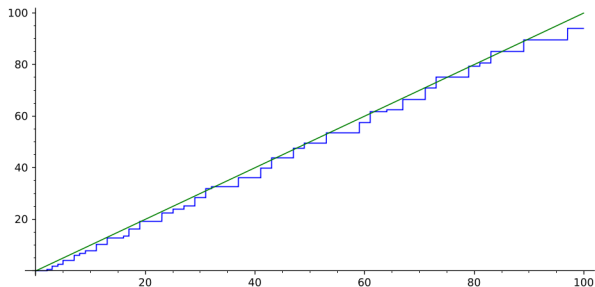
$$\psi(x) \sim x.$$



# Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

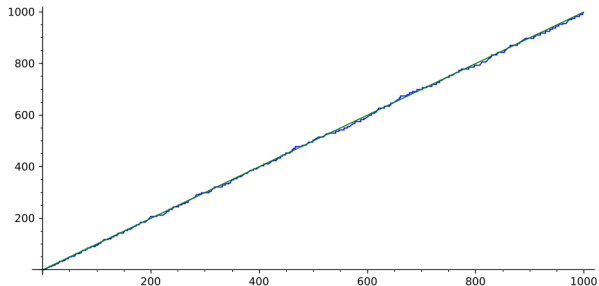
$$\psi(x) \sim x.$$



# Die Musik der Primzahlen?

Der Primzahlsatz ist äquivalent zu

$$\psi(x) \sim x.$$



# Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Die 'gedämpfte Fouriertransformierte' von  $\psi(x)$  ist die Funktion

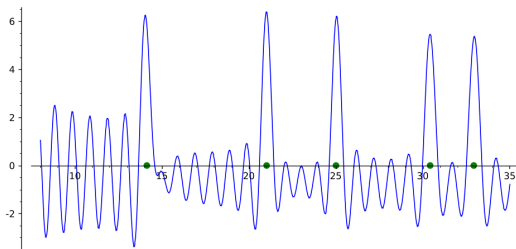
$$F(t) := \sum_{p^n \leq C} \frac{\log(p)}{p^{n/2}} \cdot \cos(n \log(p) \cdot t).$$

# Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Die 'gedämpfte Fouriertransformierte' von  $\psi(x)$  ist die Funktion

$$F(t) := \sum_{p^n \leq C} \frac{\log(p)}{p^{n/2}} \cdot \cos(n \log(p) \cdot t).$$

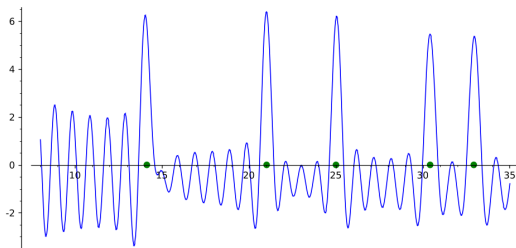
Für  $C = 500$  erhalten wir:



# Die Fouriertransformierte von $\psi(x)$

Beobachtung: die 'Peaks' sind genau die (positiven Imaginärwerte der) Nullstellen von  $\zeta(s)$ !

$$\theta = 14.134, 21.022, 25.010, 30.424, 32.935, \dots$$



# Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen  $\pi(x)$  und  $\psi(x)$  exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen  $\theta_j$  zurückgewinnen können.

## Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen  $\pi(x)$  und  $\psi(x)$  exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen  $\theta_i$  zurückgewinnen können. Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

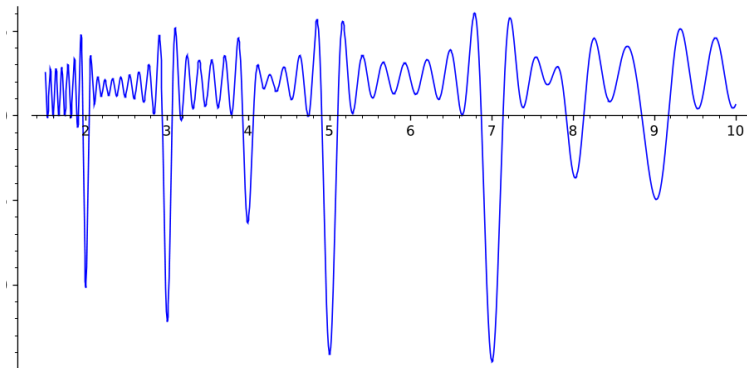
$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

## Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass wir die Funktionen  $\pi(x)$  und  $\psi(x)$  exakt als Überlagerung von reinen Schwingungen mit den Frequenzen  $\theta_i$  zurückgewinnen können. Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

$C=50$ :

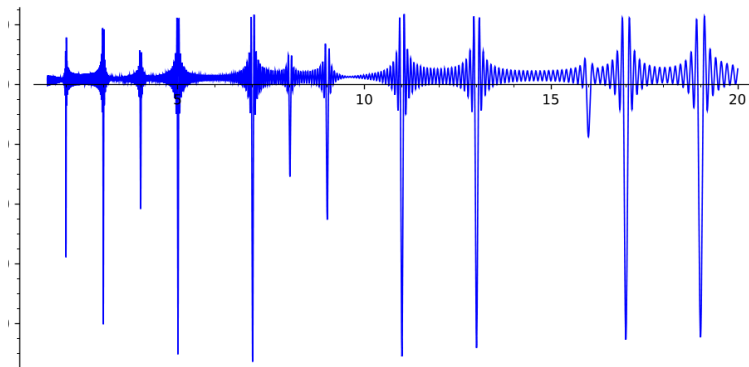


# Von den Nullstellen zu den Primzahlen

Eine vereinfachte Version der 'Rücktransformierten' ist die Funktion

$$H(t) = 1 + \sum_{\theta \leq C} \cos(\theta \cdot t).$$

$C=500$ :



# Die explizite Formel

## Theorem (Riemann-von Mangoldt)

*Für alle  $x \geq 2$  gilt*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2).$$

*Dabei läuft  $\rho$  über die nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$ .*

# Die explizite Formel

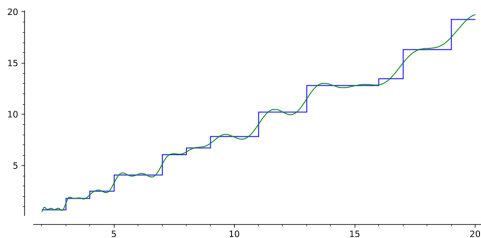
## Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle  $x \geq 2$  gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2).$$

Dabei läuft  $\rho$  über die nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$ .

Mit 10  
Nullstellen:



# Die explizite Formel

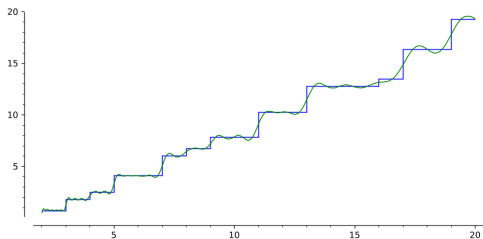
## Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle  $x \geq 2$  gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2).$$

Dabei läuft  $\rho$  über die nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$ .

Mit 20  
Nullstellen:



# Die explizite Formel

## Theorem (Riemann-von Mangoldt)

Für alle  $x \geq 2$  gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2).$$

Dabei läuft  $\rho$  über die nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$ .

Mit 100  
Nullstellen:

